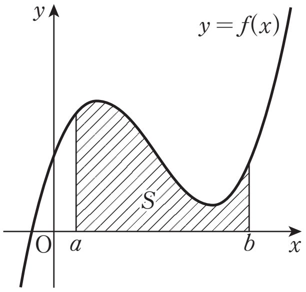
第 20 講　面積

PART1　曲線と x 軸の間の面積

要点整理と公式

要点 ①　曲線と x 軸の間の面積

区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

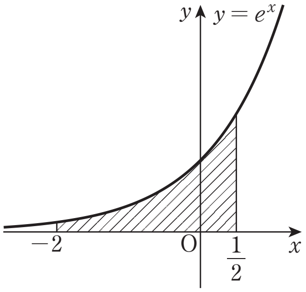


$$S=\int_a^b f(x)dx$$

で表される。

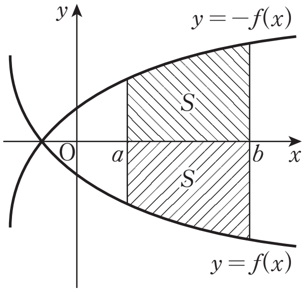
(ex) 曲線 $y=e^x$ と x 軸，および 2 直線 $x=-2$，$x=\dfrac{1}{2}$ で

囲まれた部分の面積 S は



$$S= \qquad =\left[e^x\right]_{-2}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}-\frac{1}{e^2}$$

区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \leqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は



$$S=\int_a^b\{\quad f(x)\}dx= \qquad \int_a^b f(x)dx$$

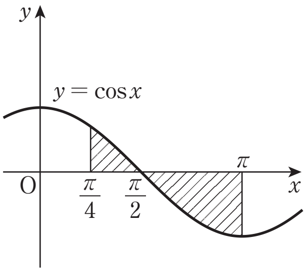
で表される。

(ex) 曲線 $y=\cos x$ と x 軸および 2 直線 $x=\dfrac{\pi}{4}$，$x=\pi$

で囲まれた 2 つの部分の面積 S について

$\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \qquad$ では常に $y \geqq 0$，$\qquad \leqq x \leqq \pi$ では常に

$y \leqq 0$ であるから



$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \qquad dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \qquad\qquad dx$$

$$=[\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \quad [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

1 (1) 次の曲線や直線および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(i) $y=\sin x$ $\left(\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{5}{6}\pi\right)$, $x=\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{5}{6}\pi$

(ii) $y=-\sqrt{x+1}$, $x=-1$, $x=1$

(2) 曲線 $y=e^x-\sqrt{e}$ と 2 直線 $x=0$, $x=1$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

Point Pickup

曲線と x 軸の間の面積

$a<b$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x)\geqq 0$ のとき　$S=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x)\leqq 0$ のとき　$S=\displaystyle\int_a^b \{-f(x)\}dx=-\int_a^b f(x)dx$

第20講 PART1 確認問題

1 曲線 $y=\cos x\left(-\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ と x 軸および 2 直線

$x=-\dfrac{\pi}{3}$，$x=\dfrac{\pi}{4}$ で囲まれた部分の面積を求めよ。［ア］

答えは下の①～④のうちから選べ。

① $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$　② $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$　④ $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

2 曲線 $y=-\sqrt{x+2}$ と x 軸および直線 $x=2$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{［イウ］}{［エ］}$ である。

3 曲線 $y=e^x-e$ と x 軸および 2 直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。［オ］

答えは下の①～④のうちから選べ。

① e^2+1　② e^2-e+1

③ e^2+2e-1　④ e^2-2e+1

第20講　面積

PART1　曲線と x 軸の間の面積

1　(1)　次の曲線や直線および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(i)　$y=\sin x\ \left(\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{5}{6}\pi\right)$，$x=\dfrac{\pi}{4}$，$x=\dfrac{5}{6}\pi$

(ii)　$y=-\sqrt{x+1}$，$x=-1$，$x=1$

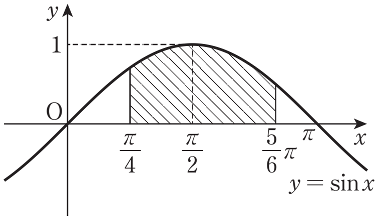
(2)　曲線 $y=e^x-\sqrt{e}$ と 2 直線 $x=0$，$x=1$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

[解答]

(1)(i)　$\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ において $y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{6}\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{6}\pi}$$

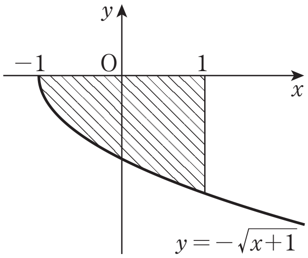
$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$$



(ii)　$-1\leqq x\leqq 1$ において $y\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_{-1}^{1}(-\sqrt{x+1})dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1}\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$



(2)　曲線 $y=e^x-\sqrt{e}$ と x 軸の共有点の x 座標は

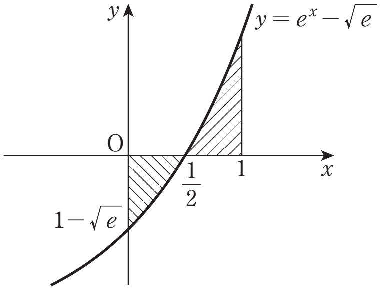
$e^x-\sqrt{e}=0$　　$e^x=e^{\frac{1}{2}}$　　よって $x=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ においては $y\leqq 0$

$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ においては $y\geqq 0$

であるから

$$S=-\int_0^{\frac{1}{2}}(e^x-\sqrt{e})dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(e^x-\sqrt{e})dx$$



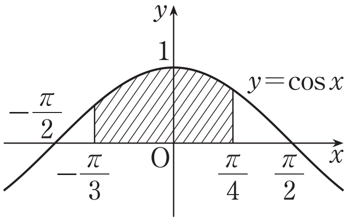
$$=-\left[e^x-\sqrt{e}\,x\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[e^x-\sqrt{e}\,x\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$=-\left\{\left(\sqrt{e}-\frac{1}{2}\sqrt{e}\right)-(1-0)\right\}+\left\{(e-\sqrt{e})-\left(\sqrt{e}-\frac{1}{2}\sqrt{e}\right)\right\}=1+e-2\sqrt{e}$$

第20講 PART1 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：③

[解説]



$-\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において，$y \geqq 0$ であるから，

求める面積は，

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \quad \text{[A]}$$

$$= \sin\frac{\pi}{4} - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

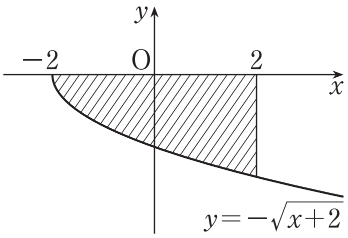
$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$$

[A]　曲線と x 軸の間の面積
$a<b$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は，
区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき，

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

2 **[正解]** イウ：16，エ：3

[解説]



$-2\leqq x\leqq 2$ において，$y\leqq 0$ であるから，

求める面積は，

$$-\int_{-2}^{2}(-\sqrt{x+2})dx=\int_{-2}^{2}\sqrt{x+2}\,dx \quad \text{[B]}$$

$$=\left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{2}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}$$

$$=\mathbf{\frac{16}{3}}$$

[B]　曲線と x 軸の間の面積

$a<b$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は，

区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x)\leqq 0$ のとき，

$$S=-\int_{a}^{b}f(x)dx$$

3 [正解] オ：④

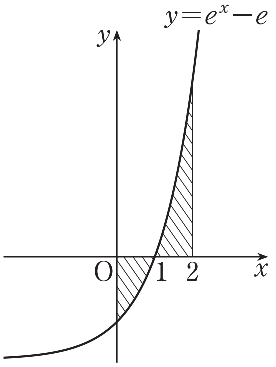
[解説]

曲線 $y=e^x-e$ と x 軸の共有点の x 座標は,

$$e^x-e=0$$

$$e^x=e$$

よって, $x=1$



$0 \leqq x \leqq 1$ において, $y \leqq 0$

$1 \leqq x \leqq 2$ において, $y \geqq 0$

であるから, 求める面積は,

$$-\int_0^1 (e^x-e)dx+\int_1^2 (e^x-e)dx \quad \text{[C]}$$

$$=-\left[e^x-ex\right]_0^1+\left[e^x-ex\right]_1^2$$

$$=-\{(e-e)-1\}+\{(e^2-2e)-(e-e)\}$$

$$=\boldsymbol{e^2-2e+1}$$

[C] [0, 1], [1, 2] の区間に分けて, 面積を求める。